

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CCSS
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ECONÓMICA

TEORÍA MACRODINÁMICA - EA811
RONALD AUGUSTO CUELA ALVAREZ

APUNTES DE CLASES N° 01
REPASO MATEMÁTICO¹ (Parte I)

1.	Ecuaciones diferenciales de primer orden	2
2.	Ecuaciones diferenciales de segundo orden	2
3.	Ecuaciones diferenciales no lineales	3
4.	Sistema de ecuaciones diferenciales lineales.....	4
5.	Sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales	4
6.	Ecuaciones en diferencias de primer orden	5
7.	Ecuaciones en diferencias de segundo orden	5
8.	Ecuaciones en diferencias no lineales	6
9.	Sistema de ecuaciones en diferencias	6
10.	Sistema de ecuaciones en diferencias no lineales.....	7
11.	Diagrama fase con ecuaciones diferenciales	7
12.	Diagrama fase con ecuaciones en diferencias	17
13.	Introducción a las ecuaciones en diferencias estocásticas.....	18

¹ Este documento es elaborado para facilitar el aprendizaje del curso y no reemplaza la bibliografía referente a este tema.

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Tenemos el caso lineal general con coeficientes constantes:

$$\dot{y}_t = ay_t + b \quad \dots(1)$$

Si definimos y^* como el valor de y_t cuando $\dot{y} = 0$, es decir en el estado estacionario.

$$y^* = -\frac{b}{a}$$

Haciendo $z_t = y_t - y^*$, (1) puede ser reescrito como:

$$\dot{z}_t = az_t$$

Cuya solución es:

$$z_t = z_0 e^{at} \quad \dots(2)$$

Reemplazando el valor de $z_t = y_t - y^*$ en (2) y despejando obtenemos:

$$y_t = (y_0 - y^*)e^{at} + y^* \quad \dots(3)$$

Para que la solución sea estable se debe cumplir que $a < 0$.

2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Partimos del caso de coeficientes constantes

$$\ddot{y}_t + b\dot{y}_t + cy_t = d \quad \dots(4)$$

Definimos como y^* como el valor de y_t cuando $\ddot{y} = \dot{y} = 0$, y obtendremos

$$y^* = \frac{d}{c}$$

Para este caso de coeficientes constantes y^* será también la solución particular de la ecuación de segundo orden. La solución Homogénea se halla al resolver:

$$\ddot{y}_t + b\dot{y}_t + cy_t = 0 \quad \dots(5)$$

Asumimos una solución $y_t = Ae^{rt}$, y obtendremos $\dot{y}_t = Are^{rt}$, $\ddot{y}_t = Ar^2 e^{rt}$, reemplazando en el sistema homogéneo:

$$Ar^2 e^{rt} + bAre^{rt} + cAe^{rt} = 0$$

Eliminando Ae^{rt} , obtendremos el polinomio característico:

$$r^2 + br + c = 0 \quad \dots(6)$$

La ecuación (6) tiene dos raíces que pueden ser iguales o diferentes. Para cada caso la solución homogénea será diferente.

Raíces Iguales

$$y_t = (A + Bt)e^{rt} \quad \dots(7)$$

Donde A y B son constantes arbitrarias. Las raíces serán reales, se puede demostrar que (7) cumple con (5).

Raíces Diferentes

$$y_t = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \dots(8)$$

Donde A y B son constantes arbitrarias. La solución (8), presenta el caso general, sin embargo si las raíces son imaginarias, estas serán conjugadas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, en tal caso podremos escribir (8) como:

$$y_t = Ae^{(\alpha+\beta)t} + Be^{(\alpha-\beta)t}$$

Factorizando $e^{\alpha t}$

$$y_t = e^{\alpha t} (Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}) \quad \dots(9)$$

Desarrollando $e^{\pm\beta t} = \cos(\beta t) \pm i\text{sen}(\beta t)$ en (9)

$$y_t = e^{\alpha t} [A \cos(\beta t) + A i \text{sen}(\beta t) + B \cos(\beta t) - B i \text{sen}(\beta t)], \text{ ordenando}$$

$$y_t = e^{\alpha t} [(A+B) \cos(\beta t) + (A-B)i \text{sen}(\beta t)]$$

Como A y B son constantes arbitrarias, también lo serán (A+B) y (A-B)i

$$y_t = e^{\alpha t} [C \cos(\beta t) + D \text{sen}(\beta t)] \quad \dots(10)$$

La solución (10) es más utilizada que (8) para el caso de raíces imaginarias.

Finalmente, la solución de (4) será la suma de la Solución Particular (de estado estacionario, y^*) y la Solución Homogénea, que tendrá tres casos.

3. Ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{y}_t = f(y_t) \quad \dots(11)$$

En este caso, analizamos el estado estacionario y^* , tal que $\dot{y}_t = 0$. En torno a este valor linealizamos con Taylor:

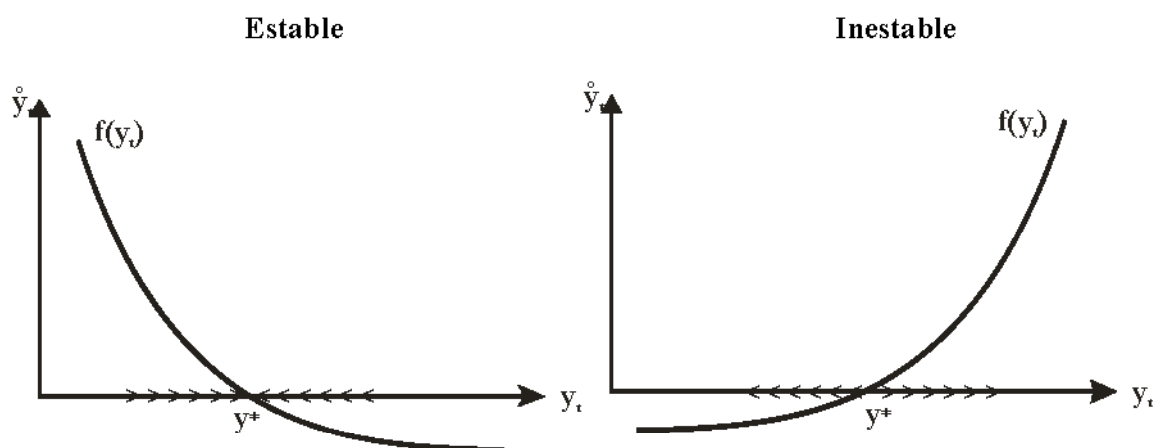
$$\dot{y}_t = f(y^*) + (y_t - y^*)f'(y^*)$$

Por definición de estado estacionario $f(y^*) = 0$

$$\dot{y}_t = (y_t - y^*)f'(y^*) \quad \dots(12)$$

Y se procede como en el caso (1), ya que y^* y $f'(y^*) < 0$ son constantes.

Generalmente se busca analizar la estabilidad del sistema alrededor del estado estacionario, en este caso podemos analizarlo gráficamente o desde la ecuación (12). La variable será estable alrededor de y^* si $f'(y^*) < 0$. Gráficamente tenemos:



4. Sistema de ecuaciones diferenciales lineales

En un sistema con 2 ecuaciones y 2 incógnitas (podría generalizarse) tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

O en forma de vectores:

$$\dot{X}_t = AX_t + B \quad \dots(13)$$

Si la matriz A es diagonal, el sistema (13) se convierte en 2 ecuaciones independientes, teniendo esto tratamos de llegar a una matriz diagonal.

Definiendo $Z_t = P^{-1}X_t$, entonces $X_t = PZ_t$ y $\dot{X}_t = P\dot{Z}_t$, y por simplicidad asumimos que $B = 0$ en (13) tenemos:

$$\begin{aligned} P\dot{Z}_t &= APZ_t \\ \dot{Z}_t &= P^{-1}APZ_t \quad \dots(14) \end{aligned}$$

Siendo P la matriz diagonalizante de A, también puede expresarse como

$$\dot{Z}_t = DZ_t$$

Donde D es diagonal, cuyos elementos de la diagonal son los autovalores o las raíces del sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{1t} \\ \dot{z}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{10}e^{\lambda_1 t} \\ z_{20}e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Reemplazando el valor de $X_t = PZ_t$ y asumiendo raíces distintas tenemos

$$X_t = [P_1]z_{10}e^{\lambda_1 t} + [P_2]z_{20}e^{\lambda_2 t}$$

Donde P_1, P_2 son los vectores propios. También puede escribirse como

$$X_t = C_1[P_1]e^{\lambda_1 t} + C_2[P_2]e^{\lambda_2 t} \quad \dots(15)$$

Y si las raíces son iguales la solución sería

$$X_t = (C_1 + C_2 t)[P_1]e^{\lambda t} + C_2[P_2]e^{\lambda t} \quad \dots(16)$$

El sistema será estable cuando las raíces sean negativas y será inestable si al menos una de las raíces es positiva. En el caso de raíces imaginarias se toma en cuenta la parte real.

5. Sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_t, y_t) \\ g(x_t, y_t) \end{bmatrix} \quad \dots(17)$$

En el estado estacionario se cumple

$$\begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En general un sistema no lineal no puede ser resuelto de forma analítica, sin embargo en este caso servirá el análisis alrededor del estado estacionario usando la aproximación de Taylor. Así el sistema (23) puede ser aproximado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) + (x_t - x^*)f_x(x^*, y^*) + (y_t - y^*)f_y(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) + (x_t - x^*)g_x(x^*, y^*) + (y_t - y^*)g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta los valores de estado estacionario. El sistema puede expresarse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} \begin{bmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{bmatrix} \quad \dots(18)$$

El sistema (18) puede tomar la representación matricial (13), en este caso no interesa en muchos casos la solución del sistema, sino el comportamiento de las variables en análisis alrededor de su estado estacionario. Para ello utilizamos el Jacobiano (Matriz A), evaluamos las raíces y concluimos si el estado estacionario es estable (raíces menores a cero), punto de silla (una raíz positiva y otra negativa), fuente (ambas raíces positivas), en caso de que las raíces sean complejas la parte real nos mostrará la estabilidad y la parte imaginaria nos mostrará la rotación (horario, antihorario).

6. Ecuaciones en diferencias de primer orden

Tenemos el caso lineal general con coeficientes constantes:

$$ay_{t+1} + by_t = c \quad \dots(19)$$

Si definimos y^* como el valor de y_t cuando $y_t = y_{t+1}$

$$y^* = \frac{c}{a+b}$$

Haciendo $z_t = y_t - y^*$, (19) puede ser reescrito como:

$$z_{t+1} = -bz_t$$

Cuya solución es:

$$z_t = z_0(-b)^t \quad \dots(20)$$

Reemplazando el valor de $z_t = y_t - y^*$ en (20) y despejando obtenemos:

$$y_t = (y_0 - y^*)(-b)^t + y^* \quad \dots(21)$$

La variable y_t será estable si $\|b\| < 1$

7. Ecuaciones en diferencias de segundo orden

$$ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = d \quad \dots(22)$$

De manera similar al caso anterior y^* es el valor de y_t cuando $y_t = y_{t+1} = y_{t+2}$

$$y^* = \frac{d}{a+b+c}$$

Este estado estacionario representa la solución particular de la ecuación diferencial (22). La solución homogénea se encontrará al resolver polinomio característico.

$$ar^2 + br + c = 0 \quad \dots(23)$$

Las raíces de la ecuación (23) permitirán construir la solución homogénea. Si las raíces son iguales, la solución homogénea será:

$$y_t^h = C_1 r^t + C_2 t r^t \quad \dots (24)$$

Si las raíces de (23) son diferentes tendremos:

$$y_t^h = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t \quad \dots (25)$$

Y en caso de que las raíces sean imaginarias:

$$y_t^h = r^t (A \cos \theta t + B \sin \theta t) \quad \dots (26)$$

En (26) r y θ son el módulo y el ángulo de las raíces imaginarias. Finalmente la solución de la ecuación (22)

$$y_t = y_t^h + y^* \quad \dots (27)$$

8. Ecuaciones en diferencias no lineales

El caso más general:

$$y_{t+1} = f(y_t) \quad \dots (28)$$

Si definimos y^* como el valor de y_t cuando $y_t = y_{t+1}$

$$y^* = f(y^*) \quad \dots (37)$$

Haciendo la aproximación respecto al valor de estado estacionario:

$$y_{t+1} = f(y^*) + (y_t - y^*) f'(y^*)$$

Por (37):

$$y_{t+1} - y^* = (y_t - y^*) f'(y^*) \quad \dots (29)$$

Reemplazando el valor de $z_t = y_t - y^*$ en (38) y despejando obtenemos:

$$z_t = (y_0 - y^*) [f'(y^*)]^t + y^* \quad \dots (30)$$

La variable y_t será estable alrededor de y^* si $\|f'(y^*)\| < 1$

9. Sistema de ecuaciones en diferencias

Partimos de un sistema con 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \dots (31)$$

O en forma de vectores:

$$X_{t+1} = AX_t + B \quad \dots (36)$$

Al igual que en el caso de ecuaciones diferenciales, si la matriz A es diagonal el sistema se desdobra en dos ecuaciones diferenciales independientes.

Definiendo $Z_t = P^{-1}X_t$, entonces $Z_{t+1} = P^{-1}X_{t+1}$ y $X_t = PZ_t$, y por simplicidad asumimos que $B = 0$ en (17) tenemos:

$$\begin{aligned} Z_{t+1} &= P^{-1}X_{t+1} = P^{-1}AX_t = P^{-1}APZ_t \\ Z_{t+1} &= DZ_t \quad \dots (32) \end{aligned}$$

Donde D es la matriz diagonal de A. También puede representarse como:

$$\begin{bmatrix} z_{1t+1} \\ z_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix} \quad \dots (37)$$

Se observa que:

$$Z_t = D^t Z_0 \quad \dots(33)$$

Reemplazando los valores de Z

$$X_t = PD^t P^{-1} X_0 \quad \dots(34)$$

Debe notarse que se pudo llegar al mismo resultado directamente de (36)'. La estabilidad del sistema dependerá de los valores de la matriz diagonal D.

10. Sistema de ecuaciones en diferencias no lineales

Partimos de un sistema con 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t)$$

$$y_{t+1} = g(x_t, y_t)$$

En estado estacionario

$$x^* = f(x^*, y^*)$$

$$y^* = g(x^*, y^*)$$

Utilizando la aproximación de Taylor

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}_{\substack{y_t=y^* \\ x_t=x^*}} \begin{bmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{bmatrix} \quad \dots(35)$$

Teniendo en cuenta lo valores de estado estacionario

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} - x^* \\ y_{t+1} - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}_{\substack{y_t=y^* \\ x_t=x^*}} \begin{bmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{bmatrix} \quad \dots(36)$$

Y se procede como en el caso anterior.

11. Diagrama fase con ecuaciones diferenciales

El uso de diagramas fase permite analizar la estabilidad de un sistema respecto a un punto, generalmente el estado estacionario, y a partir de ahí esbozar el movimiento conjunto de las variables alrededor de este punto. Es muy utilizado especialmente cuando las ecuaciones no tienen soluciones analíticas.

Ejemplo 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Obtenemos los valores de estado estacionario, con respecto a este se hará el diagrama fase.

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovalores de la matriz A, con los siguientes datos:

$$\text{Traz}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$$

$$\text{Det}(A) = \lambda_1 \lambda_2 = -10$$

Entonces las raíces serán: $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -2$, luego para cada raíz encontramos su autovector:

$\lambda_1 = 5$:

$$\begin{bmatrix} 1-5 & 4 \\ 3 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 1 - (-2) & 4 \\ 3 & 2 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

La matriz diagonalizante (sin normalizar) es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución puede escribirse como:

$$X_t = C_1 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

O más específicamente, si tenemos los valores iniciales:

$$X_t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 + 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

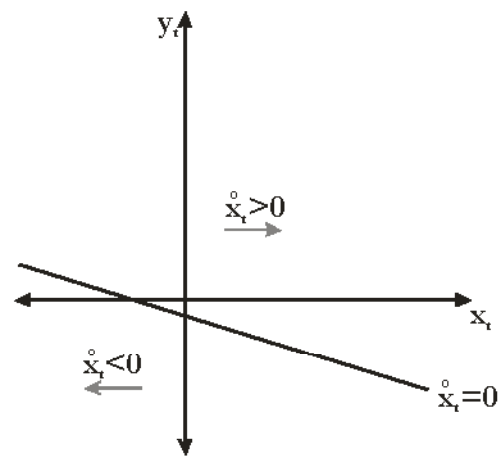
A partir de la solución puede obtenerse el diagrama fase, sin embargo lo obtendremos de manera intuitiva del problema inicial:

La variación de x_t será cero (permanecerá constante) cuando $\dot{x}_t = x_t + 4y_t + 1 = 0$, es decir en la recta $y_t = -\frac{1}{4}(x_t + 1)$, por encima de esta recta la variación de x_t será positiva y negativa por debajo de la misma:

$$\dot{x}_t > 0 \Rightarrow y_t > -\frac{1}{4}(x_t + 1)$$

$$\dot{x}_t = 0 \Rightarrow y_t = -\frac{1}{4}(x_t + 1)$$

$$\dot{x}_t < 0 \Rightarrow y_t < -\frac{1}{4}(x_t + 1)$$

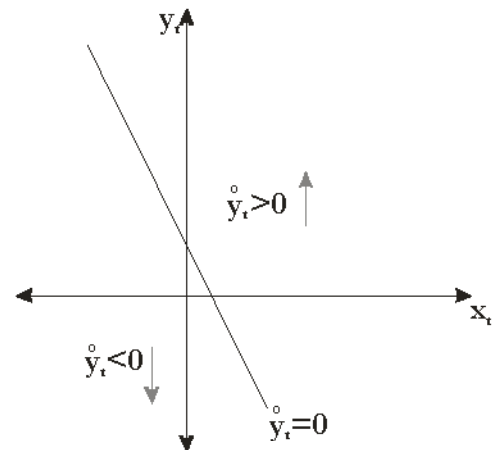


Análogamente para y_t , esta permanecerá constante cuando $\dot{y}_t = 3x_t + 2y_t - 2 = 0$, es decir en la recta $y_t = -\frac{3}{2}x_t + 1$ por encima de esta recta la variación de y_t será positiva y negativa por debajo de la misma:

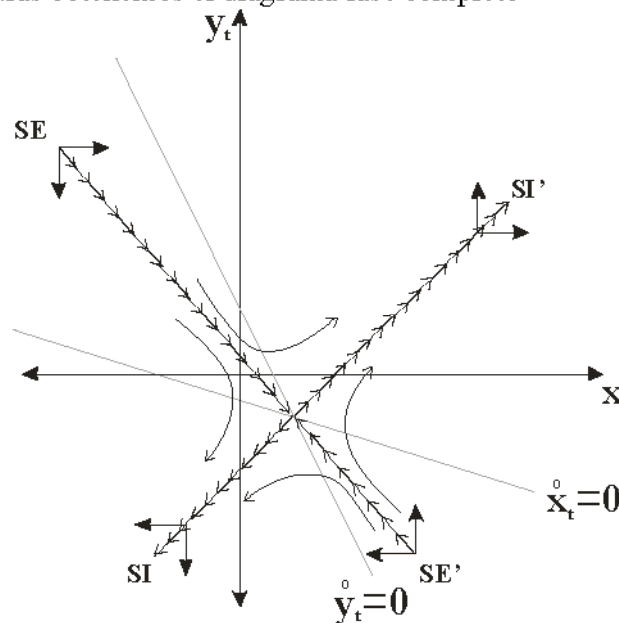
$$\dot{y}_t > 0 \Rightarrow y_t > -\frac{3}{2}x_t + 1$$

$$\dot{y}_t = 0 \Rightarrow y_t = -\frac{3}{2}x_t + 1$$

$$\dot{y}_t < 0 \Rightarrow y_t < -\frac{3}{2}x_t + 1$$



Juntando ambas figuras obtenemos el diagrama fase completo



En el gráfico debe notarse:

La intersección de las rectas $\dot{x}_t = 0$, $\dot{y}_t = 0$ coincide con el estado estacionario.

La intersección de las rectas $\dot{x}_t = 0$, $\dot{y}_t = 0$; y la de la senda estable (SE) y la senda inestable (SI) coinciden.

Sólo la senda estable lleva al estado estacionario.

Sólo la senda inestable saca un valor del estado estacionario.

La senda inestable corresponde a la raíz (autovalor) positiva $\lambda_1 = 5$, y la senda inestable

tiene como inclinación el autovector correspondiente a esta raíz $\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La senda estable corresponde a la raíz (autovalor) negativa $\lambda_2 = -2$, y la senda estable

tiene como inclinación el autovector correspondiente a esta raíz $\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Obtenemos los valores de estado estacionario, con respecto a este se hará el diagrama fase.

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovalores de la matriz A, con los siguientes datos:

$$\text{Traz}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 4$$

$$\text{Det}(A) = \lambda_1 \lambda_2 = 4$$

Entonces las raíces serán iguales $\lambda = 2$, luego encontramos los autovectores:

$\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 4 \\ -1 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 4 \\ -1 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ó } \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matriz *diagonalizante*² es

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La solución puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = (C_1 + C_2 t) e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A partir de la solución puede obtenerse el diagrama fase, sin embargo lo obtendremos de manera intuitiva del problema inicial:

La variación de x_t será cero (permanecerá constante) cuando $\dot{x}_t = 4y_t = 0$, es decir en la recta $y_t = 0$, por encima de esta recta la variación de x_t será positiva y negativa por debajo de la misma:

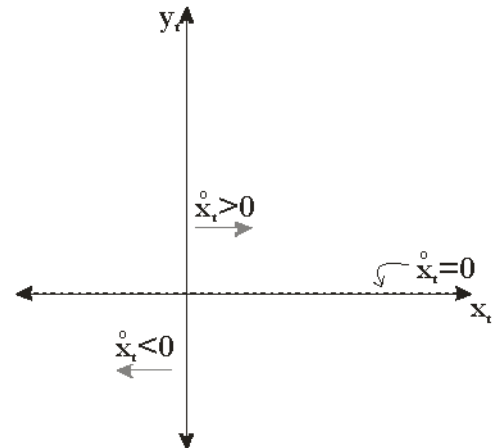
² Obsérvese que en este caso no se obtiene una matriz diagonal:

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_t > 0 \Rightarrow y_t > 0$$

$$\dot{x}_t = 0 \Rightarrow y_t = 0$$

$$\dot{x}_t < 0 \Rightarrow y_t < 0$$

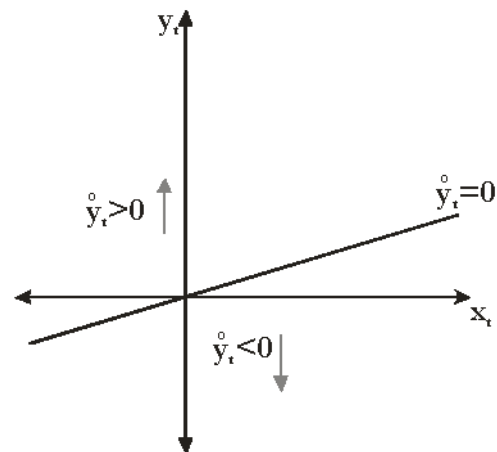


Análogamente para y_t , esta permanecerá constante cuando $\dot{y}_t = -x_t + 4y_t = 0$, es decir en la recta $y_t = \frac{1}{4}x_t$ por encima de esta recta la variación de y_t será positiva y negativa por debajo de la misma:

$$\dot{y}_t > 0 \Rightarrow y_t > \frac{1}{4}x_t$$

$$\dot{y}_t = 0 \Rightarrow y_t = \frac{1}{4}x_t$$

$$\dot{y}_t < 0 \Rightarrow y_t < \frac{1}{4}x_t$$

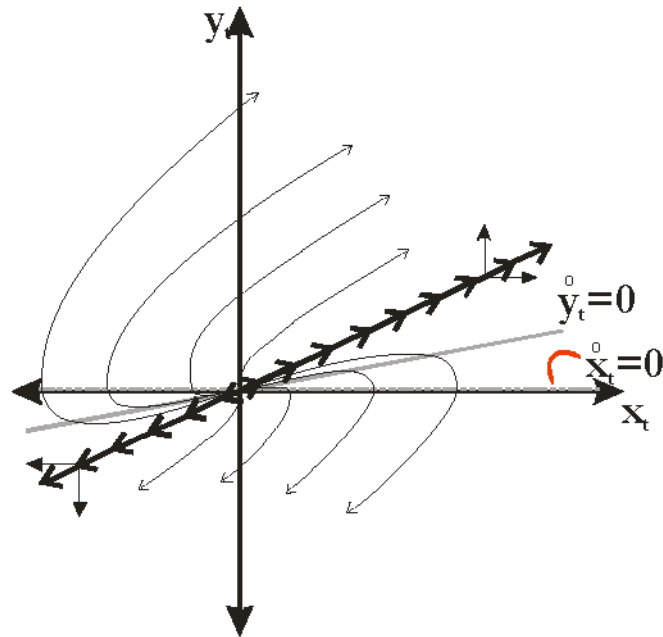


Juntando ambas figuras se obtiene el diagrama fase completo

En el gráfico debe notarse:

La intersección de las rectas $\dot{x}_t = 0$, $\dot{y}_t = 0$ coincide con el estado estacionario, con la recta $\dot{x}_t = 0$, $\dot{y}_t = 0$ y la senda inestable.

La senda inestable corresponde a la raíz (autovalor) $\lambda = 2$, y la senda inestable que es una recta tiene como inclinación el primer autovector $\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, todas las demás sendas inestables son curvas.

**Ejemplo 3:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Obtenemos los valores de estado estacionario, con respecto a este se hará el diagrama fase.

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovalores de la matriz A, con los siguientes datos:

$$\text{Traz}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2$$

$$\text{Det}(A) = \lambda_1 \lambda_2 = 2$$

Entonces las raíces serán: $\lambda_1 = 1+i$ y $\lambda_2 = 1-i$, luego para cada raíz encontramos su autovector:

$$\lambda_1 = 1+i:$$

$$\begin{bmatrix} -2-(1+i) & 5 \\ -2 & 4-(1+i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3+i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1-i:$$

$$\begin{bmatrix} -2-(1-i) & 5 \\ -2 & 4-(1-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3-i \end{bmatrix}$$

La matriz *diagonalizante*³ es V:

³ Obsérvese que en este caso no se obtiene una matriz diagonal:

$$D = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = V_1 \pm iV_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = e^t (C_1 \cos t + C_2 \text{sent}) \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + e^t (C_1 \cos t - C_2 \text{sent}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

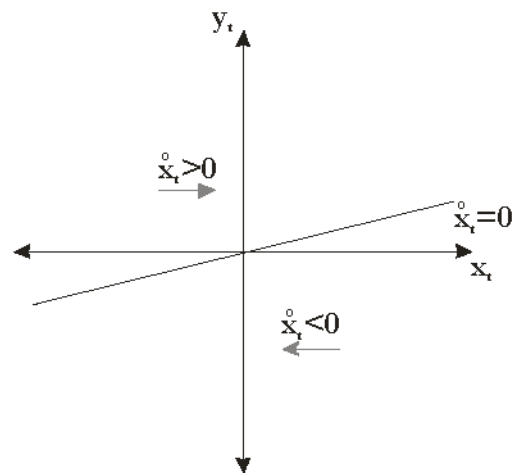
A partir de la solución puede obtenerse el diagrama fase, sin embargo lo obtendremos de manera intuitiva del problema inicial:

La variación de x_t se resumirá en:

$$\dot{x}_t > 0 \Rightarrow y_t > \frac{2}{5} x_t$$

$$\dot{x}_t = 0 \Rightarrow y_t = \frac{2}{5} x_t$$

$$\dot{x}_t < 0 \Rightarrow y_t < \frac{2}{5} x_t$$

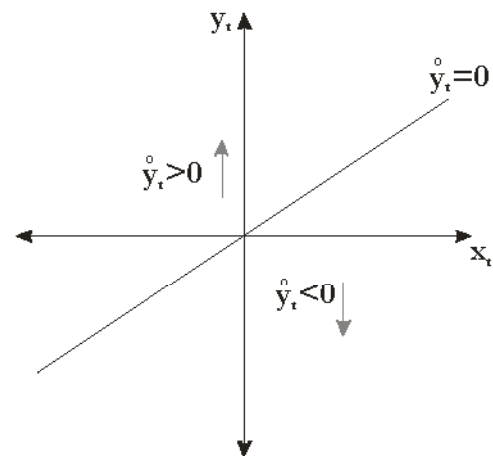


La variación de y_t se resumirá en:

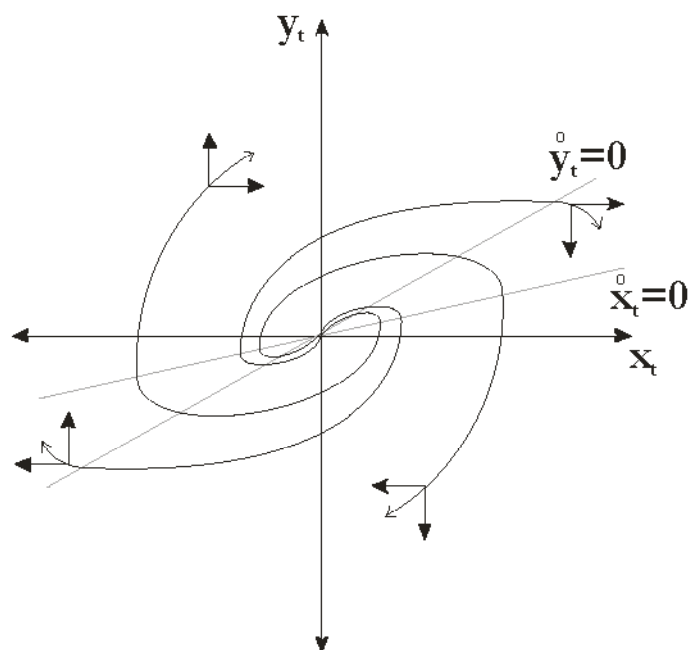
$$\dot{y}_t > 0 \Rightarrow y_t > \frac{1}{2} x_t$$

$$\dot{y}_t = 0 \Rightarrow y_t = \frac{1}{2} x_t$$

$$\dot{y}_t < 0 \Rightarrow y_t < \frac{1}{2} x_t$$



Juntando ambas figuras obtenemos el diagrama fase completo



En el gráfico debe notarse:

La intersección de las rectas $\dot{x}_t = 0$, $\dot{y}_t = 0$ coincide con el estado estacionario.

El sistema es inestable puesto que la parte imaginaria de la raíz $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ es mayor a cero, el sentido es horario debido a que la parte imaginaria tiene signo *positivo* ¿Por qué?.

Ejemplo 4:

Una economía tiene dos factores productivos capital y trabajo, la acumulación de factores viene dado por:

$$\dot{K}_t = sF(K_t, L_t) - dK_t$$

$$\dot{L}_t = L_t [F_L(K_t, L_t) - w]$$

La función de producción está representada por una función tipo Cobb-Douglas:

$$F_L(K_t, L_t) = 4[K_t L_t]^{\frac{1}{4}}$$

- i) La acumulación de capital será positiva mientras el ahorro sea mayor a la depreciación del capital, y existirá acumulación de trabajo si la productividad del trabajo es mayor al salario real (fijo).
- ii) El estado estacionario se dará cuando la cantidad de factores se mantenga estable (sin variación) y considerando únicamente valores positivos. Las curvas de equilibrios de cada variable serán:

$$\dot{K}_t = 0:$$

$$4s[K_t L_t]^{\frac{1}{4}} - dK_t = 0 \Rightarrow L_t = \left(\frac{d}{4s}\right)^4 K_t^3 \dots\dots(\text{IV.1})$$

$$\dot{L}_t = 0:$$

$$L_t \left[\left[K_t L_t^{-3} \right]^{\frac{1}{4}} - w \right] = 0 \Rightarrow L_t = \left(\frac{1}{w} \right)^{\frac{4}{3}} K_t^{\frac{1}{3}} \dots \dots (IV.2)$$

El sistema conformado por las ecuaciones (IV.1) y (IV.2), tiene como resultado:

$$K^* = \left(\frac{4s}{d} \right)^{\frac{3}{2}} w^{\frac{1}{2}}$$

$$L^* = \left(\frac{4s}{d} \right)^{\frac{1}{2}} w^{\frac{3}{2}}$$

Nótese también que el origen de coordenadas ($K^*=0; L^*=0$) es otra solución del sistema.

- iii) Para ver la estabilidad, se linealiza el sistema de ecuaciones diferenciales y analizamos el Jacobiano:

$$J = \left. \frac{\partial(\dot{K}_t, \dot{L}_t)}{\partial(K_t, L_t)} \right|_{K^*, L^*} = \begin{bmatrix} sF_K - d & sF_L \\ F_{LK} L_t & F_L - w + F_{LL} L_t \end{bmatrix}_{K^*, L^*}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}d & sw \\ \frac{1}{16} \left(\frac{d}{s} \right) & -\frac{3}{4}w \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovalores de la matriz J, con los siguientes datos:

$$\text{Traz}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{3}{4}(d + w)$$

$$\text{Det}(A) = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2}dw$$

Entonces las raíces serán:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{3}{4}(d + w) \pm \sqrt{\frac{9}{16}(d + w)^2 - 2dw}}{2}$$

Como puede demostrarse ambas raíces son *negativas* ¿?, por lo que la solución será estable.

A partir de la solución puede esbozar el diagrama fase, sin embargo lo obtendremos de manera intuitiva del problema inicial, al igual que los ejemplos anteriores:

La variación de K_t será cero (permanecerá constante) cuando $\dot{K}_t = 4s \left[K_t L_t \right]^{\frac{1}{4}} - dK_t = 0$, es

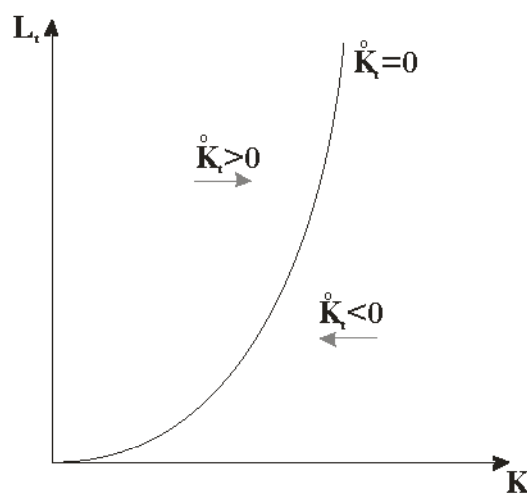
decir en la recta $L_t = \left(\frac{d}{4s} \right)^4 K_t^3$, por encima de esta curva la variación de K_t será positiva y

negativa por debajo de la misma:

$$\dot{K}_t > 0 \Rightarrow L_t > \left(\frac{d}{4s}\right)^4 K_t^3$$

$$\dot{K}_t = 0 \Rightarrow L_t = \left(\frac{d}{4s}\right)^4 K_t^3$$

$$\dot{K}_t < 0 \Rightarrow L_t < \left(\frac{d}{4s}\right)^4 K_t^3$$



Análogamente para L_t , esta permanecerá constante cuando $\dot{L}_t = L_t \left[\left[K_t L_t^{-3} \right]^{\frac{1}{4}} - w \right] = 0$, es

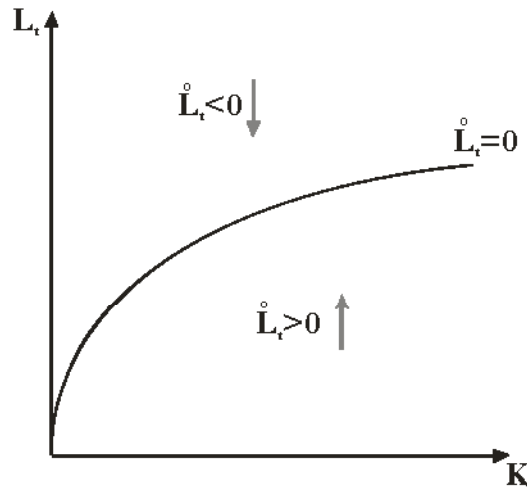
decir en la recta $L_t = \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{4}{3}} K_t^{\frac{1}{3}}$ y $L_t = 0$, teniendo en cuenta sólo el primer cuadrante por

encima de la curva $L_t = \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{4}{3}} K_t^{\frac{1}{3}}$ la variación de L_t será negativa y positiva por debajo de la misma:

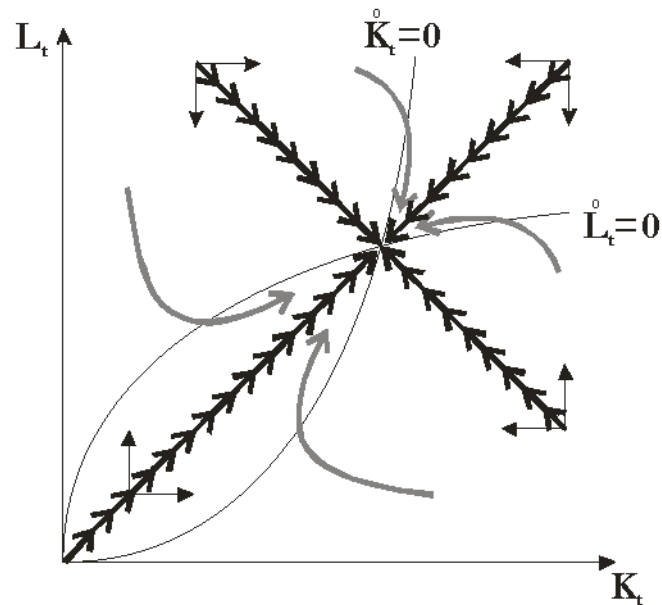
$$\dot{L}_t > 0 \Rightarrow L_t < \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{4}{3}} K_t^{\frac{1}{3}}$$

$$\dot{L}_t = 0 \Rightarrow L_t = \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{4}{3}} K_t^{\frac{1}{3}}$$

$$\dot{L}_t < 0 \Rightarrow L_t > \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{4}{3}} K_t^{\frac{1}{3}}$$



Juntando ambas figuras obtenemos el diagrama fase completo



En el gráfico debe notarse:

La intersección de las rectas $\dot{K}_t = 0$, $\dot{L}_t = 0$ coincide con el estado estacionario. Todas las sendas son estables y llevan al estado estacionario.

12. Diagrama fase con ecuaciones en diferencias

La construcción de los diagrama fase en ecuaciones en diferencia no difiere de las ecuaciones diferenciales. Si se tienen dos raíces con módulos menores a la unidad y reales el sistema será estable (nodo estable). Si los módulos de ambas raíces son mayores a la unidad y reales el sistema será inestable (fuente). Si, en valor absoluto, una raíz es mayor a la unidad y otra menor a la unidad el diagrama fase presentará un punto de silla. En el caso de raíces imaginarias, el módulo indicará si el sistema es estable o no, si el módulo es mayor a la unidad se tratará de espirales inestables, y si el módulo es menor a la unidad se tratará de espirales estable.

Raíces reales y menores a la unidad

$$|\lambda_1| < 1$$

$$|\lambda_2| < 1$$

Raíces reales y mayores a la unidad

$$|\lambda_1| > 1$$

$$|\lambda_2| > 1$$

Raíces reales una mayor y otra menor a la unidad

$$|\lambda_1| < 1$$

$$|\lambda_2| > 1$$

Raíces imaginarias con módulo menor a la unidad

$$|\alpha \pm \beta i| < 1$$

Raíces imaginarias con módulo mayor a la unidad

$$|\alpha \pm \beta i| > 1$$

13. Introducción a las ecuaciones en diferencias estocásticas

Tenemos el caso lineal general con coeficientes constantes:

$$y_t = by_{t-1} + cx_t \quad \dots(36)$$

En este caso incluimos una variable x_t en nuestra ecuación original, si consideramos que esta variable es exógena, por ejemplo en caso que y_t represente los precios y x_t podría tratarse de la oferta monetaria, se considera a esta variable como constante, y se procedería como el caso ya estudiado.

Sin embargo, qué ocurre cuando x_t es estocástica, en este caso podríamos citar la producción que depende de *shocks* de productividad, donde x_t podría comportarse como un ruido blanco.

Si tenemos un valor inicial para la variable y_t , la solución se puede encontrar haciendo rezagos iterativos para obtener

$$y_t = b^t y_0 + c \sum_{k=0}^{t-1} b^k x_{t-k}$$

La solución también se puede expresar de la siguiente manera

$$y_t = b^i y_{t-i} + c \sum_{k=0}^{i-1} b^k x_{t-k}$$

Teniendo en cuenta que la variable x_t tiene un rango de valores posibles (por ejemplo un intervalo) la ecuación en diferencias estocástica será estable cuando $|b| < 1$, similar que en el caso no estocástico, e incluso podríamos evaluar el límite cuando $i \rightarrow \infty$, y obtener.

$$y_t = c \sum_{k=0}^{\infty} b^k x_{t-k}$$

Un ejemplo simulado:

$$y_t = 3 + 0,7 y_{t-1} + x_t \quad \dots(37)$$

Asumiendo que en ambos casos la variable inicial es el estado estacionario no estocástico, es decir: $x_t = 0 \rightarrow y_t = 10$.

